Capitolo 5

Viète, Descartes e la riforma del linguaggio algebrico

5.1 Introduzione

François Viète (1540-1603), giurista francese nativo di Fontanay, consulente di re, appartiene alla schiera dei matematici dilettanti: *Io, che non mi professo matematico ma che, se ho del tempo libero, mi diletto con lo studio della matematica*[1] disse di sé introducendo la celebre soluzione trigonometrica al problema proposto da Adriaan van Roomen (Romanus) ([2], p. 305) che studieremo nel §5.3. Il ruolo di Viète è molto importante nell'evoluzione del linguaggio e del metodo di indagine proprio dell'algebra. Come accennato nel capitolo 1, Viète fu il primo matematico a servirsi *sistematicamente* delle lettere per indicare i coefficienti e l'incognita di un'equazione: consonanti nel primo caso, vocali nel secondo. La sua notazione è però ancora appesantita dal postulato fondamentale seguìto: garantire l'omogeneità dimensionale dei termini di un'equazione. Esamineremo alcuni aspetti del metodo di Viète: il rinnovato rapporto tra algebra e geometria, mediato dal ricorso alle proporzioni; l'utilizzo della trigonometria per risolvere equazioni algebriche; il riconoscimento delle relazioni esistenti tra coefficienti e radici di un'equazione algebrica; i metodi proposti per la soluzione di equazioni di terzo e quarto grado. Il processo di riforma del linguaggio algebrico e la pari dignità di algebra e geometria vengono ulteriormente sviluppati da René Descartes (1596-1650) (Cartesio) che, come Viète, non può considerarsi un matematico di professione. A Cartesio dedicheremo la seconda parte di questo capitolo analizzandone il metodo di costruzione delle equazioni algebriche e studiando la storia della regola dei segni, un risultato che consente di avere in-

[1] Ego qui me Mathematicum non profiteor, sed quem, si quando vacat, delectant Mathematices studia

formazioni, non sempre conclusive, sul numero di radici positive di un'equazione algebrica.

5.2 Il metodo di Viète

Viète, che ben conosceva la matematica greca, pone il rapporto tra algebra e geometria su nuove basi e si sforza di dare un fondamento assiomatico all'algebra, nello stile degli *Elementi* euclidei, fissando le *regole del gioco*. Ci accorgiamo di questa impostazione già nell'opuscolo *In Artem Analyticem Isagoge*, *Introduzione all'arte analitica*, articolata in 8 brevi capitoli ed apparsa nel 1591[3].

Il capitolo I contiene la distinzione classica in analisi e sintesi dei processi logici seguiti per determinare la verità di un'affermazione in matematica. Nell'analisi si concede la validità di quanto richiesto dal problema e, attraverso una catena di deduzioni, si giunge ad una verità che non può essere contestata [4]. Al contrario, nella sintesi si parte da quanto è assegnato per approdare alla comprensione e risoluzione del problema. Viète si rifà a categorie presenti nelle *Collezioni* di Pappo che aveva distinto l'analisi in *teoretica* e *problematica*. Nella prima, per dimostrare la proposizione A si esaminano le proprietà B che la possono implicare; si risale alle proprietà C da cui può seguire la validità delle B e così via a ritroso. La sintesi, al contrario, verifica la correttezza della proposizione A partendo da alcune proprietà D dedotte nel processo analitico e che possono essere assunte come verità incontestabili. La ricerca delle relazioni tra le proprietà da conoscere A e quelle note D era detta *zetetica* da Pappo ed è questo un termine centrale nell'opera di Viète:

Per mezzo della zetetica si trova un'uguaglianza od una proporzione che contiene la grandezza cercata con i dati assegnati. ([3], p.1)

Ottenuta l'uguaglianza o proporzione entra in gioco la *poristica*

con la quale si esamina la verità di un teorema a partire dall'uguaglianza ottenuta prima ([3], p.1).

Infine interviene la *retica esegetica*

grazie alla quale si mostra la grandezza dell'incognita ([3], p.1).

Esaminate le regole generali della zetetica, nel capitolo II Viète assume le proprietà dei simboli di uguaglianza e proporzione (*symbola aequalitatum et proportionum*) che emergono dagli *Elementi*: ad esempio, si trovano precetti come *se si aggiungono quantità uguali a quantità uguali, i risultati sono uguali*; *se quantità proporzionali vengono moltiplicate per altre quantità proporzionali, anche i prodotti sono in proporzione*[2] ([3], p. 2). Importante è l'ultima (n. 16) delle proprietà elencate:

date tre o quattro grandezze, sia la prima alla seconda come la seconda, od una terza quantità sta ad un'altra; il prodotto degli estremi è uguale al pro-

[2]Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta esse proportionalia

dotto dei medi. Pertanto la proporzione si può definire come costituzione di un'uguaglianza e l'uguaglianza la risoluzione di una proporzione. [3] ([3], p.2).

Il legame tra equazioni e proporzioni è centrale nell'algebra di Viète in quanto il ricorso alle proporzioni rappresenta il tramite tra algebra e geometria [6]: le proporzioni servono a formare le equazioni che, a loro volta risolvono le proporzioni. Il capitolo III riguarda il principio di omogeneità cui Viète attribuisce somma importanza, come abbiamo visto nel capitolo 1.

La prima e perpetua legge delle uguaglianze o delle proporzioni che è detta legge delle grandezze omogenee, perché le riguarda, è la seguente: bisogna confrontare tra loro solo grandezze omogenee.[4] ([3], p. 2)

Abbiamo già esaminato (Cap. 2) il contenuto del capitolo IV della *In artem analyticem isagoge* dove si trova formulata la regola dei segni. Passiamo dunque al capitolo V dove Viète esamina le leggi algebriche fondamentali e le proprietà delle elementari trasformazioni di equazioni.
1) la regola del trasporto: *antithesi aequalitatem non immutari* ([3], p. 9). In altre parole, se $x^2 - d = g - bx$ allora $x^2 + bx = g + d$.
2) semplificazione dividendo per l'incognita: *hypobibasmo aequalitatem non immutari* ([3], p. 9). Se $x^3 + bx^2 = zx$, per *ipobibasmo* si ha anche

$$x^2 + bx = z :$$

Viète non dice nulla a proposito dell'eventualità che, con questa semplificazione, si possa perdere la radice $x = 0$ valore che, dopo tutto, non viene percepito come accettabile.
3) divisione per un coefficiente numerico: *parabolismo aequalitatem non immutari* ([3], p. 9). Se $dx^2 + bx = z$ allora è anche $x^2 + \frac{b}{d}x = \frac{z}{d}$.

Il capitolo VI contiene una breve descrizione della poristica, mentre il capitolo VII espone il ruolo della retica esegetica. Infine, nel capitolo VIII Viète ricapitola i concetti e le notazioni alla base dell'arte analitica.

Viète fa uso abbbondante delle trasformazioni di equazioni, descritte ampiamente nel *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*, pubblicato postumo nel 1615. La *expurgatio per uncias* ([7], pp. 130-132) consente l'eliminazione di qualche termine aggiungendo o sottraendo all'incognita una quantità che è una parte del coefficiente del termine da eliminare: si tratta della trasformazione già adoperata da Cardano. Ad esempio, nel caso di $A^3 + 3BA^2 = Z$, la trasformazione $A + B = E$ consente di ottenere un'equazione da cui viene eliminato il termine di secondo grado, a vantaggio di un termine lineare: $E^3 - 3BE = Z$. Viète fornisce le regole su come deve essere effettuata la sostituzione per l'eliminazione (*expurgatione*) di un termine specifico, basate sui coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$. Un secondo tipo di trasformazione è detta da Viète $\Pi\rho\tilde{\omega}\tau o\nu - \epsilon\chi\alpha\tau o\nu$ ([7], pp. 132-134) a causa *dell'analogismo*

[3] Si fuerint tres quatorve magnitudines, & sit ut prima ad secundam, ita secunda illa, vel tertia quaepiam ad aliam, erit quod sit sub extremis terminis aequale ei quod sit sub mediis. Itaque proportio potest dici costitutio aequalitatis. Aequalitas, resolutio proportionis.

[4] Prima & perpetua lex aequalitatum seu proportionum, quae, quoniam de homogeneis concepta est, dicitur lex homogeneorum, haec est: Homogenea homogeneis comparari.

cui si sottopone l'equazione data[5] ([7], p.136). Questa trasformazione viene posta *a rimedio del vizio della negazione*, in quanto si utilizza per trasformare coefficienti negativi in positivi.

Ad esempio, l'equazione $A^3 - BA = Z$, grazie alla trasformazione $\Pi\rho\tilde{\omega}\tau o\nu - \varepsilon\chi\alpha\tau o\nu$ $A = Z/E$, diventa

$$E^3 + BE^2 = Z$$

da cui è scomparso il segno negativo. L'*anastrofe* (inversione, [7], pp.134-138) consiste nell'abbassare di grado un'equazione, nota che ne sia una radice: quando una radice, necessariamente positiva, non emerge dall'analisi dell'equazione, l'anastrofe richiede la sostituzione di x in $-x$ per ricercare una radice positiva dell'equazione trasformata.

L'*isomeria* (parti uguali, [7], pp. 138-139) libera invece dal *vizio* delle frazioni e serve ad eliminare i coefficienti frazionari, conservando il polinomio *monico*. Ad esempio, nell'equazione $A^3 + \frac{B}{D}A = Z$ si pone $AD = E$ e si ottiene l'equazione in E $E^3 + BDE = ZD^3$. Infine la *Climactica Paraplerosis* ([7], pp. 140-148) serve ad eliminare il *vizio* dell'asimmetria che consiste nella presenza di coefficienti irrazionali.

Tutte queste trasformazioni intendono liberare le equazioni da imperfezioni (*vitia*) ma Viète, sempre in [7], presenta tre generi di trasformazioni dal significato più profondo [5] da lui chiamate *Zetesi*, *Plasma* e *Synchresi*. La zetesi consiste nella riduzione di un'equazione (di grado non superiore al terzo) ad uno zetetico, cioè ad un problema espresso con il ricorso a proporzioni continue. Riscritta l'equazione di terzo grado in A

$$A^3 + B^2A = B^2Z \tag{5.1}$$

nella forma $B^2(Z - A) = A^3$, la si può porre sotto forma di proporzione

$$B : A = \frac{A^2}{B} : (Z - A)$$

che, combinata con l'altra, ovvia, proporzione $B : A = A : A^2/B$, fornisce la proporzione continua cercata

$$B : A = A : \frac{A^2}{B} = \frac{A^2}{B} : (Z - A)$$

che a sua volta permette di associare (*zetesi*) all'equazione il problema

Trovare il secondo termine di una proporzione continua di quattro elementi, assegnato il primo termine e la somma del secondo con il quarto.[6] ([7], p.86)

La trasformazione *plasmatica* all'apparenza sembra essere volta a trasformare un'equazione di grado minore in un'altra di grado superiore ma, a ben vedere,

[5] Letteralmente: primo-cento o primo-ultimo in quanto, dopo la trasformazione, il primo termine di un'equazione si trova all'ultimo posto.

[6] Data prima & aggregato secundæ et quartæ in serie quatuor continue proportionalium, invenire secundam.

il suo obiettivo finale è esattamente l'opposto ed è finalizzata ad ottenere formule risolutive delle equazioni. Vediamo un esempio (Teorema IV, Cap. XIII): L'equazione in A

$$A^2 + BA = S + D \tag{5.2}$$

si può ricondurre ad $A^2 - D = S - BA$ che, elevata al quadrato, permette di ottenere

$$A^4 - (2D + B^2)A^2 + 2SBA = S^2 - D^2. \tag{5.3}$$

Viète in qualche modo inverte i passaggi e, assegnata l'equazione di quarto grado nella forma

$$A^4 + \gamma A^2 + \delta A = \varphi, \tag{5.4}$$

che, confrontata con (5.3) fornisce il sistema

$$\begin{cases} \gamma = -(2D + B^2) \\ \delta = 2BS \\ \varphi = S^2 - D^2 : \end{cases} \tag{5.5}$$

ricavando D da $(5.5)_1$ ed S da $(5.5)_2$ e si inseriscono questi valori in $(5.5)_3$ si ottiene l'equazione

$$B^6 + 2\gamma B^4 + (4\varphi + \gamma^2)B^2 - \delta^2 = 0$$

di *terzo* grado in B^2. Una volta determinato B, si può trovare A grazie all'equazione di *secondo* grado (5.3) dove ora S e D sono funzioni note dei coefficienti di (5.4). La parte del *De emendatione* dedicata alla *Synchresi* i teoremi sono solo enunciati ma mai dimostrati. Secondo David Hume, che pubblicò nel 1636 l'opera *Algèbre de Viète*, la concisione potrebbe essere dovuta al fatto che l'opera ci è giunta in una fase embrionale che non poté essere sviluppata perché Viète morì. Nella sincresi si considerano due equazioni e si trova il modo di stabilire una proporzione continua contenente i coefficienti e le soluzioni delle equazioni. Viète considera tre tipi di equazioni: le *ancipiti*, le *contradittorie* e le *inverse*. Alle equazioni ancipiti appartengono le equazioni come

$$BA^2 - A^5 = Z \qquad \text{o} \qquad BE^2 + E^5 = Z$$

di cui vengono considerate solo le soluzioni positive. Viète intende ottenere relazioni che esprimano i coefficienti in termini delle radici di un'equazione: qui A ed E. Le equazioni contradittorie sono del tipo

$$A^n + BA^m = Z \quad E^n - BE^m = Z$$

ovvero $x^n + Bx^m = Z$ con n pari ed $m < n$ dispari, in modo che, mandando x in $-x$ si passa dalla prima alla seconda equazione proposta di cui E è soluzione positiva. Uguagliando le due equazioni si ricava il coefficiente

$$B = \frac{E^n - A^n}{E^m + A^m}$$

da cui si ottiene poi

$$Z = \frac{A^n E^m + E^n A^m}{E^m + A^m}\,.$$

Le equazioni inverse sono del tipo $Bx^n - x^m = Z$ con m ed n entrambi dispari come

$$BA - A^3 = Z \qquad E^3 - BE = Z$$

su cui si opera come nel caso precedente. Rimando a [5] per uno studio dettagliato di alcuni dei teoremi di Viète al riguardo.

Sempre in [7], Viète propose un metodo per la soluzione delle equazioni di terzo grado che qui riproduciamo, affiancandolo al commento di Ludwig Matthiessen, autore di un corposo trattato sulla risoluzione delle equazioni algebriche letterali [10].

Viète considera due problemi di terzo grado

$$\begin{cases} x^3 + 3bx = 2c \\ x^3 = 3bx + 2c \end{cases} \tag{5.6}$$

ed affronta il problema della loro riduzione ad equazioni di secondo grado. L'equazione $(5.6)_1$ viene formulata in questi termini

Proponatur A cubus + B plano 3 in A, aequari Z solido 2

cioè $A^3 + 3B^2A = 2Z^3$ e viene dapprima ridotta introducendo una variabile ausiliaria E tale che

$$E^2 + EA = B^2 : \tag{5.7}$$

Oportet facere quod propositum est. E quad +A in E, aequetur B plano.

Osserviamo la diversa nomenclatura per le potenze delle incognite e le dimensioni dei coefficienti: le potenze superiori alla prima sono indicate con *quadratus* e *cubus*, mentre il coefficiente B, che ha dimensioni di una superficie, è detto *plano* e Z, dimensionalmente un volume, è detto *solido*. L'incognita E viene ora interpretata geometricamente: *Dalla formazione dell'equazione si comprende che B piano è il rettangolo compreso tra due lati, il minore dei quali è E e la differenza dal maggiore è A:*[7] B^2 rappresenta l'area di un rettangolo il cui lato minore è E, mentre $A + E$ è il lato maggiore. Si esprime ora A in funzione di E

$$A = \frac{B^2 - E^2}{E}$$

e si sostituisce in $(5.6)_1$ ricavando l'equazione

$$E^6 + 2Z^3E^3 = B^6 \tag{5.8}$$

che è di sesto grado ma, come dirà Lagrange, risolubile alla maniera di quelle di secondo grado: l'equazione (5.8) è nota come *risolvente* di Viète. Viète considera solo la radice *positiva* di (5.8):

$$E_1^3 = \sqrt{Z^6 + B^6} - Z^3 =: D^3$$

[7] Unde B planum ex hujusmodi aequationis constitutione, intellegitur rectangulum sub duobus lateribus quorum minus est E, differentia a majore A.

ed ottiene come prima espressione di A

$$A = \frac{B^2 - D^2}{D}$$

E così se A cubo e B piano moltiplicato per 3 sono uguali a 2 per Z solido e $\sqrt{B\textit{plano-plano-plani} + Z\textit{solido-solido}}$ *solido uguaglia D cubo, allora* $\frac{B\textit{planum}-D\textit{quad}}{D}$ *è l'incognita A cercata.*[8]

Ora Viète considera un nuovo cambio di variabile

$$E^2 - EA = B^2 \tag{5.9}$$

da cui segue che $A = \frac{E^2-B^2}{E}$ e quindi E obbedisce all'equazione

$$E^6 - 2Z^3E^3 = B^6$$

la cui radice positiva

$$E_2^3 = \sqrt{Z^6 + B^6} + Z^3 =: D^2$$

permette di scrivere

$$A = \frac{D^2 - B^2}{D}.$$

Usando (5.7) e (5.9) si ha

$$B^2 = -E_1A - E_1^2 = E_2A + E_2^2$$

da cui si ottiene $A = E_2 - E_1$, cioè

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{B^6 + Z^6} + Z^3} - \sqrt[3]{\sqrt{B^6 + Z^6} - Z^3}$$

formula che viene così espressa da Viète *Pertanto*

$$\sqrt{C\cdot\sqrt{B.pl.pl.pl + Zsol.sol.} + Zsolido} - \sqrt{C\cdot\sqrt{B.pl.pl.pl + Zsol.sol.} - Zsolido}$$

è l'incognita A cercata.[9]

Viète opera similmente sull'equazione $(5.6)_2$ per ottenere la soluzione

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{c^2 - b^3} + c} + \sqrt[3]{c - \sqrt{c^2 - b^3}}.$$

[8] Itaque si A cubus et B plano 3, aequatur Z solido 2, et $\sqrt{B\text{plano-plano-plani} + Z\text{solido-solido}}$-Z solido, aequetur D cubo, ergo $\frac{B\text{planum}-D\text{quad}}{D}$, sit A de qua quaeritur.

[9] Itaque

$$\sqrt{\text{C}\cdot\sqrt{B.pl.pl.pl + Zsol.sol.} + Zsolido} - \sqrt{\text{C}\cdot\sqrt{B.pl.pl.pl + Zsol.sol.} - Zsolido}$$

est A quaesita.

In termini moderni, la trasformazione di Viète si può formulare in questi termini. Si parta dall'equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

e si sostituisca $x = y - \frac{p}{3y}$ ottenendo

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

che si riduce all'equazione di secondo grado in $t := y^2$

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

risolta da

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Sempre nel *De emendatione aequationibus* Viète presenta anche un metodo di risoluzione per equazioni di quarto grado che richiede di completare un quadrato. Ecco, in estrema sintesi, i dettagli del metodo seguendo, con piccole varianti, la ricostruzione di Matthiessen [10].

Viète considera l'equazione

$$x^4 + 2gx^2 + bx = c$$

ed introduce una variabile ausiliaria y formando il quadrato del trinomio $x^2 + g + \frac{1}{2}y^2$

$$\left(x^2 + g + \frac{1}{2}y^2\right)^2 = x^4 + 2gx^2 + \frac{1}{4}y^4 + y^2x^2 + gy^2$$

per cui l'equazione di partenza può essere posta nella forma

$$\left(x^2 + g + \frac{1}{2}y^2\right)^2 = c + g^2 + \frac{1}{4}y^4 + gy^2 - bx + y^2x^2$$

e si determina y in modo che il membro di destra si possa riscrivere esso pure come un quadrato

$$c + g^2 + \frac{1}{4}y^2 + gy^2 - bx + y^2x^2 = \left(\frac{b}{2y} - xy\right)^2$$

che si traduce nell'equazione

$$y^6 + 4gy^4 + 4(c + g^2)y^2 = b^2$$

che è *cubica* in $z = y^2$. Presa una soluzione $y = y_1$ di questa equazione, risolvere quella di partenza si riduce alla soluzione dell'equazione di secondo grado

$$x^2 + y_1x = \frac{b}{2y_1} - g - \frac{1}{2}y_1^2.$$

5.3 Soluzioni trigonometriche di equazioni algebriche

Con Viète la trigonometria viene adoperata per risolvere equazioni algebriche, una tecnica che, combinata alla rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi, darà altri frutti. Nel *De Recognitione Æquationum* (Cap. VI, pp. 90-91) [1]) Viète considera l'equazione ([11], p.94)

$$x^3 + ax + b = 0$$

che, posto $x = ky$ e scelto $k = \sqrt{-\frac{4a}{3}}$[10] è riducibile all'equazione

$$4y^3 - 3y = c$$

e siccome la formula di triplicazione fornisce

$$4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta = \cos 3\vartheta,$$

se si pone $y = \cos\vartheta$ si vede che l'equazione di terzo grado equivale a

$$\cos 3\vartheta = c:$$

ancora una volta dunque, costruito un triangolo con un angolo pari a $3\vartheta = \arccos c$, la trisezione di quest'angolo è soluzione dell'equazione proposta e, viceversa, risolvendo l'equazione si ottiene la trisezione di un angolo. Curiosamente, non si incontrano quantità immaginarie nel caso irriducibile ma nel caso $c > 1$.

Un altro celebre esempio di uso della trigonometria nella risoluzione di equazioni algebriche in Viète si trova nella soluzione di un problema proposto dal matematico belga Adriaan van Roomen, (latinizzato in Romanus), professore di matematica a Lovanio. Nelle *Ideae Mathematicae* del 1593, van Roomen propose ai matematici di tutto il mondo la soluzione di un problema all'apparenza formidabile. Egli chiedeva la soluzione della seguente equazione numerica di 45° grado, scritta qui nella notazione moderna:

$$\begin{aligned}&45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11}\\&+105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19}\\&+483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27}\\&+46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37}\\&-12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = A.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Van Roomen, anche per mostrare di essere in grado di risolvere il problema, proponeva tre esempi in cui assegnava un valore ad A e dichiarava quale fosse *la* corrispondente soluzione x

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \qquad x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}},$$

[10] Siamo nel *casus irreducibilis* e dunque $a < 0$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}}} \qquad x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$$

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \qquad x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{\frac{3}{16}} + \sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}}}}:$$

in quest'ultimo esempio, van Roomen fornisce le approssimazioni di x ed A con un numero altissimo di cifre decimali. La sfida lanciata da van Roomen era di trovare la soluzione di (5.10) quando

$$A = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}. \tag{5.11}$$

Viète, tra le altre cose, dimostrerà che il secondo esempio di van Roomen è errato e va sostituito con

$$A = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \qquad x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}.$$

L'equazione dovette suonare artificiosa a Viète che la ridusse elegantemente ad un problema di geometria di cui fornì l'equivalente algebrico. La chiave di Viète per risolvere il problema di van Roomen è: *Che cosa dunque chiede ai geometri Andriano Romano?*

Dato un angolo dividerlo in tre parti.

Dato un angolo dividerlo in cinque parti uguali.

Che cosa agli analisti?

Data una figura solida ottenuta dal prodotto di un lato e di un coefficiente piano assegnato, trovare il valore del cubo. Dato un quadrato-cubo combinato aggiungendo un certo piano-solido per un lato ed un assegnato coefficiente piano-piano; trovare il valore del piano-solido combinato ad un solido per un coefficiente piano.[11] ([2], pp. 312-313)

Viète ha riconosciuto [14] che il membro di sinistra dell'equazione di van Roomen si può leggere come lo sviluppo di $2 \sin 45\alpha$ in termini di $2 \sin \alpha$ e la sua tecnica di soluzione è la seguente: si risolve dapprima l'equazione di terzo grado

$$3x - x^3 = A$$

[11] Quid igitur quaerit a Geometris Adrianus Romanus?
Datum angulum trifariam secare.
Datum angulum quintufariam secare.
Quid ab analystis?
Datum solidum sub latere & dato coefficiente plano adfectum, multa cubi, resolvere. Datum quadrato-cubum adfectum; adjunctione quidem plano-solidi sub latere & dato coefficiente plano-plano; multa vero plano-solidi sub cubo & coefficiente plano, resolvere.

dove A è la costante proposta da van Roomen: nel formalismo di Viète questa equazione è scritta come $3N - 1C$ *aequatur* A. Se $x = B$ è una soluzione Viète procede a risolvere l'equazione

$$3y - y^3 = B$$

e, detta $y = D$ una sua soluzione egli risolve l'equazione di quinto grado

$$5z - 5z^3 + z^5 = D$$

ed afferma che le soluzioni $z = G$ di questa equazione sono quelle richieste da van Roomen. Qual è dunque la *ratio* dietro il metodo di Viète? Siccome egli ha compreso che $A = 2\sin 45\alpha = 2\sin\, 3(15\alpha)$ utilizza la formula di triplicazione

$$3\sin\beta - \sin^3\beta = \sin 3\beta$$

e se ne serve per ottenere i valori di $B = 2\sin 15\alpha = 2\sin 3(5\alpha)$. Ora itera la procedura e per ottenere $D = 2\sin\, 5\alpha$ si serve delle formule di quintuplicazione

$$5\sin\beta - 5\sin^3\beta + \sin^5\beta = 2\sin 5\beta$$

per ricavare il valore di $\sin\alpha$, da cui si ottiene la soluzione del problema di van Roomen. Viète inoltre rilancia e, scelto $A = \sqrt{2} = 2\sin 45°$ ottiene non solo la soluzione $x = 2\sin 1°$ ma le ventitré soluzioni positive della forma $x = 2\sin\alpha$, con $\alpha = 1° + 8k°$ e $\alpha = 3° + 8k°$. La soluzione con il valore (5.11) proposto da van Roomen corrisponde all'arco di $0°32'$, quarantacinquesima parte di $24° = 60° - 36°$ che viene a sua volta costruito per differenza dell'arco sotteso da un esagono regolare con quello sotteso da un decagono regolare.

Le idee che Viète espone risolvendo questo problema per la verità un po' artificiale sono profonde e daranno frutti nei secoli successivi. Anzitutto Viète ribadisce indirettamente il legame tra equazioni di terzo grado e trisezione dell'angolo; la trigonometria viene utilizzata per risolvere un'equazione algebrica; l'equazione di grado 45 viene risolta per gradi riducendola alla soluzione di due equazioni di terzo grado e di una di quinto grado, procedimento che ritroveremo in Lagrange e Gauss.

5.4 Risoluzione numerica delle equazioni algebriche in Viète

Viète propose un metodo per la risoluzione numerica delle equazioni algebriche che fu adoperato fin quando venne soppiantato dal metodo di Newton-Raphson. In effetti Newton era a conoscenza del metodo di Viète e lo studiò accuratamente come dimostra il fatto che in alcuni suoi appunti databili non oltre il 1664 vi sono trascrizioni ed annotazioni di esempi tratti dal *De numerosa potestatum ad exegesin resolutione* [12] pubblicato nel 1600 a Parigi e ristampato nelle opere matematiche curate da van Schooten. Il metodo di Viète era stato esposto

sommariamente anche da William Oughtred nelle edizioni della *Clavis Mathematicarum* successive al 1647. Ancora Lagrange ne fa un cenno nel *Traité sur la résolution des équations numériques* ma solo per ricordarne la complessità. Esponiamo il metodo di Viète seguendo [13] uno dei primi problemi numerici, il secondo dei venti che compaiono in [12]. Consideriamo dunque l'equazione

$$x^3 + 30x = 14356197;$$

Per seguire il procedimento di Viète, riscriviamo l'equazione proposta nella forma $p(x) = N$. Il primo passo consiste nella scelta della prima approssimazione della radice che, ricordiamolo, deve essere positiva. Il numero N non è un cubo di un intero ($N \neq x^3$) ma N è ottenuto aggiungendo $30x$ ad un cubo. Dunque Viète parte da un intero x_0 di cui sia semplice calcolare il cubo e tale che $x_0^3 < N$. La scelta è $x_0 = 200$, così $x_0^3 = 8000000$. Ora Viète calcola $p(x_0)$ termine a termine ottenendo $p(x_0) = 8006000$ e quindi calcola la differenza $N - p(x_0) = 6350197$. Questi passaggi sono riportati in un primo schema. Per trovare la seconda approssimazione Viète calcola dapprima $3x_0^2 \times 10 = 1200000$ e $3x_0 \times 10^2 = 60000$. Lo scopo di questi calcoli è di trovare rapidamente la correzione x_1 da apportare ad x_0. Infatti Viète calcola separatamente $3x_0^2x_1$, $3x_0x_1^2$, x_1^3 e $30x_1$ con $x_1 = 10$ e la somma di questi risultati viene sottratta ad $N - p(x_0)$. In altre parole, Viète considera l'equazione

$$p(x_0 + x_1) = N$$

che si riduce a

$$p(x_1) + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 = N - p(x_0).$$

Nella prima tabella egli calcola solo i termini $3x_0^2x_1$ e $3x_0x_1^2$ che sono i termini *dominanti* e in seguito calcola la *summa divisorum*, cioè $p(x_1) + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2$. A mio parere questo viene fatto per guidare la scelta della cifra successiva perché $p(10) + 3x_0^2 \cdot 10 + 3x_0 \cdot 10^2 = 1261300$ e $1261300 \times 4 < N - p(x_0) < 1261300 \times 5$, giustificando così la scelta successiva $x_1 = 40$. Ora Viète può agilmente calcolare per *questa* scelta di x_1 $3x_0^2 \times 40 = 4800000$ e $3x_0 \times 40 = 24000$, $40^3 = 64000$ e $30 \times 40 = 1200$ ottenendo $p(x_1) + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 = 5825200$ che, sottratto a $N - p(x_0)$ lascia il residuo $524997 = N_1$. Viète riapplica la procedura prendendo $x_0 = 240$ e calcolando ancora $3x_0^2 = 3x_0^2 \times 1 = 172800$ e $3x_0 = 720$ la cui somma 173550 lascia intravedere 3 come cifra della correzione successiva: in effetti l'esempio è costruito *ad hoc* perché 243 è la radice esatta dell'equazione di partenza. Osserviamo che in questo come in altri esempi i coefficienti sono molto asimmetrici: alcuni sono molto più grandi rispetto ad altri. Si tratta di una scelta dettata a mio parere da ragioni pedagogiche perché Viète vuole trovare rapidamente la prima approssimazione. Qualora non vi sia una preponderanza di qualche termine rispetto ad altri, occorre anteporre uno studio preliminare di separazione delle radici. Come accennato, il metodo di Viète sarà soppiantato dal metodo di Newton, più rapido e non limitato alle funzioni algebriche. Come osservato in [14, 13], le somiglianze tra i due metodi ci sono ma mi sembra che la ricostruzione del metodo di Viète che si effettua in queste opere sia troppo influenzata dal metodo di Newton-Raphson che può appoggiarsi sul calcolo differenziale.

5.5 Le Formule di Viète-Girard

Al Capitolo XIV del *De Emendatione* compaiono, per le equazioni dal secondo al quinto grado le famose relazioni di *Viète-Girard* che legano i coefficienti di un'equazione alle radici. Vediamo come vengono enunciati i teoremi relativi alle equazioni di terzo e quarto grado, con un formalismo più vicino al nostro.

Data l'equazione

$$A^3 - (B + D + G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG$$

l'incognita si ottiene da una delle quantità B, D, G.

Data l'equazione

$$(BDG + BDH + BGH + DGH)A - (BG + BD + BH + DG + DH + GH)A^2 + \\ +(B + D + G + H)A^3 - A^4 = BDGH,$$

Allora la radice A si ottiene da una qualsiasi tra le quattro quantità B, D, G, H.[12] ([7], p. 158)

Viète è fiero di questo elegante risultato che corona la stesura del volume:

E questa elegante e silloge di un bellissimo ragionamento, viene posta a suggello e fine di un trattato d'altra parte esteso.[13] ([7], p. 158)

Alle formule che legano i coefficienti di un'equazione alle radici della stessa viene associato il nome di un altro matematico francese, Albert Girard (1595-1632) di confessione protestante e per questo costretto a riparare in Olanda dove studiò matematica a Leida. Egli fu il curatore dell'edizione delle opere di Stevino e dall'*Arithmétique* di quest'ultimo trasse spunto per scrivere nel 1629 la *Invention Nouvelle en algebre* [8], un agile opuscolo che è molto interessante per la storia dell'algebra. Infatti, vi troviamo enunciato senza dimostrazione quello che diverrà noto come teorema fondamentale dell'algebra, insieme al teorema che lega radici e coefficienti di un'equazione:

Ogni equazione algebrica ha tante soluzioni quanto mostrato dalla denominazione della più alta quantità presente, salvo le equazioni incomplete: e la prima faction delle soluzioni coincide al valore del termine che segue immediatamente il massimo, la seconda faction, il coefficiente successivo, la terza il successivo e così via fino all'ultima faction che è uguale all'ultimo coefficiente, con segni che si possono evidenziare in ordine alterno.[14] ([8])

---

[12] Si

$$A^3 - (B + D + G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG$$

A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, G.

Si

$$(BDG + BDH + BGH + DGH)A - (BG + BD + BH + DG + DH + GH)A^2 + \\ +(B + D + G + H)A^3 - A^4 = BDGH,$$

A explicabilis est de qualibet illarum quatuor B, D, G, H.

[13] Atque haec elegans et perpulchrae speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem et coronida tamen imponito.

[14] Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes: & la premiere faction des solutions

Rimando al capitolo 6 per il commento circa il teorema fondamentale dell'algebra e mi limito ad osservare che possiamo rendere il termine *faction* con con combinazione di prodotti. La prima *faction* di un insieme di n numeri è per Girard la loro somma; la seconda è la somma dei prodotti a due a due; la terza è la somma di tutti i prodotti a tre a tre e così via fino all'ultima che è il prodotto di tutti gli n numeri. Nella Definizione XII, Girard introduce il *triangolo di estrazione* (*triangle d'extraction*), cioè il triangolo di Pascal, grazie al quale enuncia il Teorema I

Assegnata una moltitudine di numeri, la moltitudine dei prodotti di ogni faction si può esprimere grazie al triangolo di estrazione: e tramite il suo rango, a seconda della moltitudine di numeri[15] [8]

La successiva spiegazione (*Explication*) chiarisce il senso del teorema:

Vi siano quattro numeri, occorrerà prendere il rango dei (4) *nel triangolo di estrazione, che è 1, 4, 6, 4, 1: il primo 1 significa l'unità della massima; il 4 la prima faction che è somma di quattro numeri; il 6 significa che la seconda faction è composta da 6 prodotti a due a due; e così di seguito.*[16]. [8])

Dunque, i coefficienti del triangolo di Pascal esprimono il numero di addendi che formano le varie *factions*.

Osserviamo che, per essere certi di leggere le somme dei prodotti delle radici prese a k a k dai coefficienti dell'equazione, Girard la dispone *en ordre alterne* per cui un'equazione come $x^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$ viene riscritta come

$$x^4 + 6x^2 + 1 = 4x^3 + 4x$$

per cui le *factions* sono, nell'ordine, 4, 6, 4, 1 che si ottengono dall'unica radice $x = 1$ dell'equazione, di molteplicità 4.

Girard poi giunge in modo abbastanza curioso ad enunciare prima di Newton i cosiddetti teoremi *newtoniani* che esprimono la somma delle potenze delle radici di un'equazione:

Potrebbe sembrare a qualcuno che le factions possano essere espresse altrimenti rispetto a quanto fatto sopra come se, al posto di dire: la somma, i prodotti a due a due; i prodotti a tre a tre, &. si potese dire: la somma: la somma dei quadrati: la somma dei cubi, &c., cosa che non sussiste perché, quando vi sono più soluzioni, la somma starà per il termine successivo a quello di grado massimo, a somma dei prodotti a due a due per quello successivo, &c. come è

---

est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction de mesmes, est esgale au nombre du deuxiesme meslé; la troisieme, au troisieme, & tousjours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeteure, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

[15] Si une multitude de nombres sont proposez, la multitude des produits de chacune faction se peut exprimer par le triangle d'extraction: & par le rang d'iceluy selon la multitude des nombres.

[16] Soyent 4 nombres, il faudra prendre le rang des (4) au triangle d'extraction, qui est 1, 4, 6, 4, 1: le premier 1 signifie l'unité de la maxime; le 4 la premiere faction qui est la somme des 4 nombres; le 6 signifie que la deuxiesme faction est composée de 6 produits deux à deux; & ainsi du reste

già stato spiegato a sufficienza; ma non è così delle potenze, come si potrebbe obiettare. [17] ([8])

Girard non dimostra il teorema ma osserva che, dette x_k, $(k = 1, ..., n)$ le radici dell'equazione

$$x^n + Bx^{n-2} + ... = Ax^{n-1} + Cx^{n-3} + ...,$$

si ha

$$\sum x_k = A \quad \sum x_k^2 = A^2 - B \qquad \sum x_k^3 = A^3 - 3AB + 3C$$
$$\sum x_k^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + B^2 - 4D.$$

Girard opera un passo in avanti rispetto a Viète quando considera liberamente radici positive (*plus que rien*), negative (*moins que rien*) od immaginarie (*envelopées*). Mi sembra interessante la *giustificazione* geometrica dei numeri negativi che viene effettuata in un problema (*Probleme d'Inclinaison*) che è un esempio di geometria analitica (ricordiamo che la *Géométrie* di Cartesio sarà pubblicata nel 1637, mentre Girard pubblicò nel 1629).

Finora non abbiamo ancora spiegato a cosa servano le soluzioni negative, quando ve ne siano. La soluzione negativa si spiega in Geometria procedendo all'indietro, ed il segno meno indietreggia, laddove il segno + avanza.[18] ([8])

È l'idea di verso di percorrenza di un segmento che conferisce ai numeri negativi quella cittadinanza nella geometria, a lungo negata. Il problema formulato e risolto da Girard si riassume nella Figura 5.1: Dato un punto A posto sulla bisettrice del primo e terzo quadrante in modo che $AF = AB = 4$. Il problema posto da Girard è di tracciare la retta per A in modo che la sua intercetta (cioè il segmento CN compreso tra gli assi ortogonali DH e CL) abbia lunghezza $\sqrt{153}$. Posto $FN = x$, Girard nota laconicamente che si avrà

$$x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256. \tag{5.12}$$

Infatti, dal triangolo rettangolo AFN abbiamo $AN^2 = 16 + x^2$ ed inoltre, dalla similitudine tra i triangoli ANF ed ONC abbiamo

$$\frac{AN}{\sqrt{153}} = \frac{|x|}{|4 - x|},$$

per cui elevando al quadrato e semplificando, si risale all'equazione (5.12) di cui egli elenca le quattro soluzioni affiancando il significato geometrico: $x = 1$ corrisponde ad FN, $x = 16$ corrisponde ad FD, $x = -\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$ che *indica*

[17] Il pourroit sembler à quelqu'un que les factions seroyent encor expliquables autrement de que dessus, comme au lieu de dire, la somme: le produits a deux à deux; les produits de trois à trois, &c. qu'on pourroit dire & plus simplement: La somme: la somme des quarez: la somme des Cubes, &c. ce qui n'est pas ainsi, car soyent plusieurs solutions, la somme sera pour le premier meslé, la somme des produits deux à deux pour le second meslé, &c. comme il a esté suffisamment expliqué; mais il n'en est pas ainsi des puissances comme on pourroit objecter.

[18] Iusques icy nous n'avons encor expliqué à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là où le + avance.

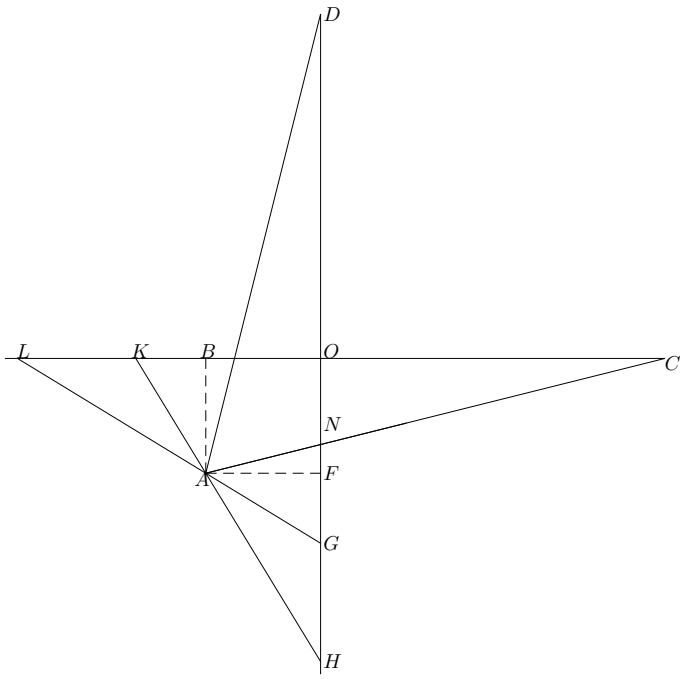

Figura 5.1: Il problema di inclinazione che conduce ad un'equazione di quarto grado con radici negative che Girard interpreta geometricamente ricorrendo all'idea di segmento orientato.

il punto G dal punto F ed $x = -\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$ che *indica il punto H dal punto F*. Ecco la chiara esposizione di Girard: *Queste soluzioni mostano i punti G ed H, come se le distanze FG , FH fossero meno di nulla, presi FN ed FD che crescono mentre FG, FH retrocedono finché le intercette CN, DP, GL, HK, tendono ad inclinarsi a partire da A, facendo ciascuna* $\sqrt{153}$*, secondo le regole qui stabilite. E per interpretarle ancora meglio, le due soluzioni che sono minori di 0 si debbono scambiare, a seconda dei segni.*

$$\textit{si otterrà} \begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} & \textit{per } FG \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} & \textit{per } FH \end{cases}$$

che vanno contate in verso opposto a quello di FN, FD, come mostra la figura precedente: & dunque si dovranno intendere così tutte le soluzioni negative, che è un osservazione con conseguenze in geometria, sconosciute sinora. [19] ([6])

[19] Assavoir monstrant lesdits points G & H, comme si les distances FG, FH estoyent moins que rien, en retrogradant, prenant que FN, FD avancent, & FG, FH reculent en arriere, tellement donc que les interceptes CN, DP, GL, HK, tendent & s'enclinent au point A faisant chacune $\sqrt{153}$, selon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux solutions qui sont moins que 0, se doivent

Questo esempio non compare nella *Géométrie* di Cartesio ma è invece ben presente a Frans van Schooten che lo riporta nei suoi *Commentarii* alla *Géométrie* cambiando solo i dati numerici e disponendo le lettere in modo differente. L'interpretazione delle quantità geometriche offerta da van Schooten [9] non si discosta da quella proposta da Girard.

5.6 L'algebra in Cartesio

La modifica del linguaggio algebrico iniziata da Viète venne proseguita da René Descartes (Cartesio) nella *Géométrie* il cui III libro è dedicato ai problemi *solidi* o *più che solidi*, cioè esprimibili tramite equazioni di grado superiore al terzo.

Abbiamo già visto nel capitolo 2 un esempio di problema piano per la soluzione delle equazioni di secondo grado. In questa sezione ci concentriamo sulla risoluzione cartesiana dei problemi di terzo e quarto grado per passare nella sezione seguente a considerare lo sviluppo storico della regola dei segni che consente di ottenere un limite superiore al numero di soluzioni positive di un'equazione algebrica. Quanto all'equazione di terzo grado, Cartesio anzitutto ne consiglia la *preparazione* eliminando, tramite opportune trasformazioni, i coefficienti da razionali in interi e, laddove fosse richiesto, di eliminare il più possibile i coefficienti irrazionali. Il passo successivo è il controllo della eventuale presenza di radici *razionali* a partire dall'esame dei divisori del termine noto, secondo la regola che era stata enunciata per la prima volta dal matematico e poeta francese Jacques Peletier (1517-1582). Quando questo fosse il caso, nota Cartesio, il problema si abbassa immediatamente di grado e dunque non offre alcuna difficoltà. Osserviamo che Cartesio aveva enunciato il teorema

È evidente da quanto precede che la somma di un'equazione avente più radici è sempre divisibile per un binomio formato dall'incognita diminuita del valore di una radice vera od aumentata del valore di una delle radici false. In questo modo, il grado di un'equazione può essere abbassato. ([15], p. 159)

Soffermiamoci su alcuni punti di questo passo, utili ad interpretare alcune idee di Cartesio. Anzitutto, quando Cartesio parla di *somma* di un'equazione intende il polinomio $p(x)$ le cui radici sono soluzioni di $p(x) = 0$. Il binomio divisore di $p(x)$ viene presentato in due modi differenti a seconda che si consideri una radice *vera* o *falsa*. Per Cartesio le radici vere sono le positive metre le false sono le negative. Oggi il teorema (detto talora di Cartesio-Ruffini) si enuncia dicendo che $x = x_0$ è una radice di $p(x) = 0$ se e solo se $x - x_0$ divide $p(x)$. Poiché in Cartesio le difficoltà di fronte a quantità negative non sono del tutto scomparse, egli enuncia il teorema usando il binomio $x - x_0$, se $x_0 > 0$, ed il

changer, assavoir les signes.

$$\text{viendra} \begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{pour } FG \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{pour } FH \end{cases}$$

Lesquels il faut poser au contraire de FN, FD, comme il est exprimé en la figure precedente: & ainsi le faudra-il entendre de toutes solutions par moins, qui est une chose de consequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

binomio $x + x_0$, quando $x_0 < 0$. Nel Capitolo 6 vedremo come Cartesio enunci il teorema fondamentale dell'algebra con una formulazione cautelativa.

La costruzione geometrica dell'equazione di quarto grado proposta da Cartesio, oltre all'impiego di coniche diverse dalla circonferenza, si caratterizza per essere una risoluzione *grafica* dell'equazione, a differenza delle costruzioni *in superficie piana* proposte da Bombelli che, salvo in alcuni casi [5], non consentono di costruire graficamente la soluzione. Cartesio tratta l'equazione

$$x^4 = px^2 - qx + r \tag{5.13}$$

e gli ingredienti della sua costruzione geometrica si possono riassumere schematicamente come segue (Fig. 5.2):

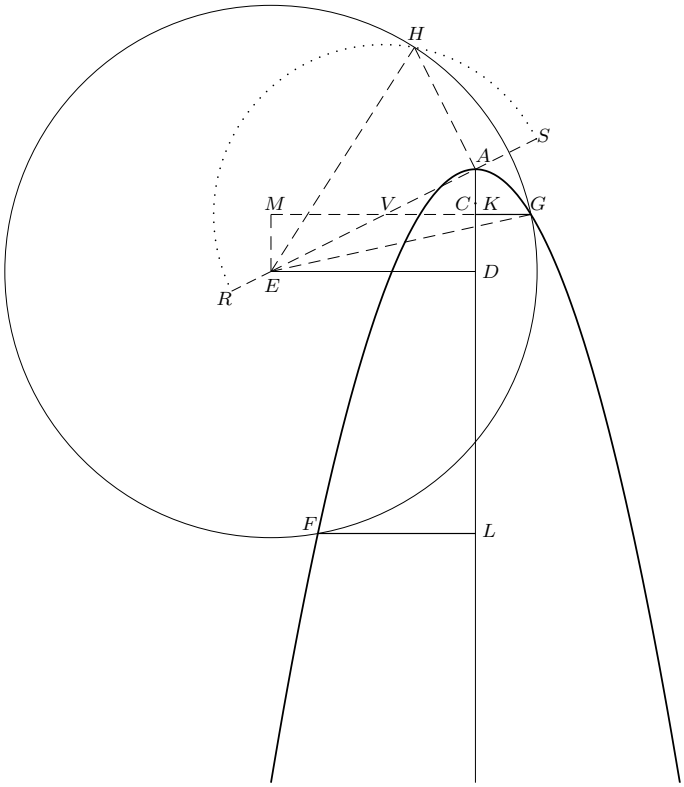

Figura 5.2: Costruzione geometrica dell'equazione di quarto grado $x^4 = px^2 - qx + r$ tramite l'intersezione di una circonferenza ed una parabola.

1. Tracciare una parabola di *latus rectum*[20] pari ad 1; Questo equivale a dire che il segmento $AC = \frac{1}{2}$ se A e C sono vertice e fuoco della parabola.

[20] il latus rectum rappresenta la distanza del fuoco dalla direttrice della parabola e coincide con il parametro introdotto nel capitolo **??**

Si riporti sull'asse della parabola $CD = \frac{p}{2}$ e, ortogonalmente all'asse, il segmento $DE = \frac{q}{2}$. Sul segmento AE si riporti il punto R tale che $AR = r$ e, sul prolungamento di AR dalla parte opposta ad A si consideri il punto S tale che $AS = 1$, cioè lungo quanto il *latus rectum* della parabola.

2. Con centro nel punto medio V di RS, si tracci la semicirconferenza di diametro RS.

3. Si tracci la perpendicolare in A ad RS e sia H il punto di intersezione con la semicirconferenza appena tracciata: si ha

$$AH^2 = AS \times AR = AR. \tag{5.14}$$

4. Con centro in E, si tracci la circonferenza di raggio EH che interseca la parabola nei punti F e G.

5. *Ora, la circonferenza FG può tagliare, o essere tangente alla parabola in 1, 2, 3, o 4 punti tracciando dai quali le perpendicolari all'asse, si ottengono tutte le radici dell'equazione, tanto le vere che le false. Se la quantità q è positiva le radici vere saranno quelle perpendicolari che, come FL, stanno dalla stessa parte della parabola in cui si trova E, centro del cerchio; mentre le altre, come KG, saranno le radici false. D'altra parte, se q è negativa, le radici vere sono quelle che si trovano dalla parte opposta [rispetto ad E] e quelle false o negative saranno quelle dalla stessa parte di E, centro del cerchio. Se il cerchio non tocca la parabola in alcun punto, è segno che l'equazione non ha né una radice vera né una falsa ma che tutte le radici sono immaginarie.* ([15], p.200)

Vediamo in questo passo la stessa interpretazione delle soluzioni negative data da Girard nel problema di inclinazione.

Posto $GK = x$ si ha $AK = x^2$, visto che la parabola ha *latus rectum* unitario. Per il punto 1 della costruzione si ha

$$DK = EM = AC + CD - AK = \frac{1}{2} + \frac{p}{2} - x^2$$

e dunque

$$EM^2 = DK^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)^2 = x^4 - px^2 - x^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{p}{2} + \frac{1}{4}. \tag{5.15}$$

D'altra parte $DE = MK = \frac{q}{2}$ per costruzione e dunque $GM = x + \frac{1}{2}q$, da cui segue

$$GM^2 = x^2 + qx + \frac{1}{4}q^2 \tag{5.16}$$

che, sommata a (5.15), fornisce

$$EG^2 = GM^2 + EM^2 = x^4 - px^2 + qx + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}. \tag{5.17}$$

D'altra parte si può esprimere $EH = GE$ in un altro modo. Infatti sappiamo che $ED = \frac{1}{2}q$ ed $AD = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$ per cui nel triangolo rettangolo ADE si ha

$$AE = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}};$$

inoltre, per (5.14) si ha $AH = \sqrt{r}$ ed essendo anche il triangolo EAH rettangolo si ha

$$EH^2 = EG^2 = AH^2 + AE^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$$

che, uguagliata a (5.17) riproduce esattamente (5.13). A patto di saper tracciare la parabola usata da Cartesio, il metodo esposto consente di determinare graficamente le radici reali di (5.13).

Quando $r = 0$, la circonferenza di centro E e raggio EH passa per il vertice della parabola ed infatti l'equazione di quarto grado ammette la radice $x = 0$ e si può immediatamente ridurre al terzo.

Cartesio è anche ricordato per avere proposto un metodo alternativo di soluzione delle equazioni di quarto grado che consente di ottenere una risolvente di sesto grado mancante dei termini di grado dispari e dunque in tutto equivalente ad un'equazione di terzo grado. L'idea del metodo è presentata nella *Géométrie* ([15], pp. 180-188) e la risolvente di Cartesio si ottiene dalla condizione di scomponibilità del polinomio di partenza nel prodotto di due equazioni di secondo grado. Cartesio si limita a dare la regola in questi termini

Invece di

$$x^4 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$$

si scriva

$$y^6 \pm 2py^4 + (p^2 \pm 4r)y^2 - q^2 = 0$$

(⋯) Trovato il valore di y^2, possiamo servircene per separare l'equazione precedente in due altre, ciascuna di secondo grado, le cui radici saranno le stesse di quelle dell'equazione originale. Invece di $x^4 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0$, si scrivano le due equazioni

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2y} = 0$$

e

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2y} = 0.$$

Una prima dimostrazione del metodo di Cartesio si trova nelle note di Florimonde de Beaune alla prima edizione latina della *Géométrie*, curata da Frans van Schooten. De Beaune, prendendo l'equazione di quarto grado nella forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{5.18}$$

considera la seconda equazione proposta da Cartesio

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0.$$

e, riscrittala nella forma

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p = \frac{q}{2y} - yx,$$

eleva al quadrato ambo i membri ottenendo

$$x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}p^2 + qx - \frac{q^2}{4y^2} = 0$$

da cui sottrae la (5.18) ricavando

$$\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{q^2}{4y^2} - r = 0$$

che, moltiplicata per $4y^2$, riproduce la risolvente di Cartesio

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0\,. \tag{5.19}$$

Dal canto suo, van Schooten nel commento ricostruisce il metodo di Cartesio nel modo che sarà riprodotto nei testi successivi. van Schooten confronta (5.18) con il prodotto di due equazioni di secondo grado

$$x^2 + yx + z = 0 \qquad x^2 - yx + v = 0$$

in cui y, z e v sono incogniti. Eseguendo il prodotto ed uguagliando i singoli coefficienti a quelli di (5.18) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} z - y^2 + v = p \\ (v - z)y = q \\ vz = r\,: \end{cases} \tag{5.20}$$

dalle prime due equazioni si ottiene

$$z = \frac{1}{2}y^2 + \frac{p}{2} - \frac{q}{2y} \qquad \text{e} \qquad v = \frac{1}{2}y^2 + \frac{p}{2} + \frac{q}{2y}$$

che, poste in $(5.20)_3$, ridanno la risolvente di Cartesio (5.19).

5.7 Storia della regola dei segni di Cartesio

La regola dei segni enunciata da Cartesio nel III libro della *Géométrie* rappresenta il primo tentativo sistematico di localizzare il numero di radici appartenenti ad un intervallo (a, b), precisamente all'intervallo $(0, \infty)$—radici positive—ed all'intervallo $(-\infty, 0)$—radici negative. In questa sezione, sulla scorta di [16], esamineremo le tappe principali della storia di questa regola dall'enunciato, nel 1637, per giungere alla dimostrazione rigorosa data da Carl Friedrich Gauss nel 1828.

Nelle prime pagine del Libro III, Cartesio enuncia la regola dei segni in questi termini: ricordiamo che per Cartesio le radici positive sono dette *vere*, quelle negative *false*.

Possiamo anche stabilire il numero di radici vere e false di ogni equazione in questo modo: Un'equazione può avere tante radici vere quanti cambiamenti di segno essa contiene da + a − o da − a +; e tante radici false quante sono le volte in cui si trovano due segni + o due segni −. ([15], p. 160)

Come esempio, Cartesio considera l'equazione *completa*

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

per concludere che, essendoci tre cambiamenti di segno, *sappiamo che ci sono tre radici vere* mentre vi è un'unica radice falsa, dal momento che vi è una sola permanenza di segno. Cartesio ha ben presente come sia possibile trasformare un'equazione in un'altra che ha radici di segno opposto rispetto a quello delle radici di partenza: occorre cambiare di segno a tutti i termini di esponente dispari, lasciando inalterati i termini di esponente pari ovvero, diremmo oggi, trasformare $\mapsto -x$.

Cartesio non fornisce alcuna dimostrazione della regola dei segni ed un primo problema che sorse tra i matematici nel verificarne la correttezza fu quello di circoscrivere la portata della regola. Per prima cosa Cartesio formula la regola in modo che il numero di variazioni o di permanenze indichino un limite *superiore* al numero di radici positive o negative, rispettivamente: *un'equazione può avere* tante radici quante sono le variazioni, ha appena detto Cartesio. Questi limiti superiori sono raggiunti a patto che tutte le radici dell'equazione proposta siano reali. Inoltre, nel caso delle radici negative, la regola è corretta solo se l'equazione proposta è *completa*.

L'ambiguità nascosta nella presentazione della regola fu ben presto notata e fornì l'occasione per una serie di attacchi rivolti a Cartesio da parte di qualche avversario. Il primo a confutarne la generalità fu Gilles Personne de Roberval (1602-1675) che fece conoscere il suo parere a Cartesio attraverso una lettera spedita per il tramite di Pierre de Carcavi (1600-1684) il 9 luglio 1649: *A pag. 373 voi (Cartesio) dite che vi sono tante radici vere quante volte i segni + e − si trovano cambiati in un'equazione, &c. Vi è dimostrazione del contrario in una infinità di casi.* ([16], p.338)

Un mese più tardi, il 17 agosto 1649, Cartesio risponde a Carcavi in termini fermi

La sua (di Roberval) seconda obiezione è manifestamente falsa perché io non ho mai detto a p. 373 quello che egli vuole che io abbia detto, che vi sono altrettante radici vere quanti sono i cambiamenti di segno + e − che si trovano, né ho alcuna intenzione di sostenerlo, ed ho espressamente dimostrato a pagina 380 quando succede che non ve ne sono in questo numero, cioè quando vi sono delle radici vere positive. ([16], p.338)

Cartesio si riferisce all'esempio dell'equazione $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ che ha una sola radice positiva a fronte delle tre variazioni presenti. In questo punto, Cartesio aveva osservato: *Né le radici vere né quelle false sono sempre*

reali; talora sono immaginarie ([15], p.175), il che indica come egli considerasse escluse dal conteggio delle radici positive quelle immaginarie di cui però opera la distinzione tra vere e false, mostrando quanto poco chiare fossero le idee sui numeri immaginari. Nonostante questo, Roberval insistette ancora a presentare i suoi controesempi da cui emerge con chiarezza che egli, al contrario, distingueva tra radici immaginarie positive e negative. Resta il fatto che la mancanza di chiarezza sui numeri immaginari contribuì a creare della confusione.

Un primo sforzo chiarificatore fu operato da van Schooten che dedicò ampio spazio alla regola dei segni nei suoi *Commentarii* alla *Géométrie*. Qui egli osservò che l'uguaglianza tra numero di variazioni e radici positive un lato e numero di permanenze e radici negative dall'altro si ha solo quando tutte le radici sono reali (*aequationes quae producuntur ex suis radicibus*) ed afferma che ciò non accade quando l'equazione ha radici immaginarie. van Schooten si occupa anche del problema delle equazioni *difettive*, in cui mancano alcuni termini, attraverso alcuni esempi. Riferendosi all'equazione

$$x^3 + px - q = 0 \qquad p, q > 0$$

van Schooten la riscrive in due modi diversi

$$x^3 + 0x^2 + px - q = 0 \qquad \text{e} \qquad x^3 - 0x^2 + px - q = 0$$

Nel primo caso, l'equazione così completata ha due permanenze ed una variazione per cui si potrebbe concludere per l'esistenza di due radici negative (false) ed una positiva (vera); nel secondo caso invece vi sono solo variazioni e dunque tre radici positive. Poiché solo una variazione è *stabile* nel passaggio da un'equazione all'altra, van Schooten conclude che vi è una sola radice positiva mentre le altre sono immaginarie dal momento che assumerle positive o negative porta ad un diverso conteggio a seconda che si consideri $+0x^2$ o $-0x^2$. Al contrario, quando si considera l'equazione

$$x^3 - px + q = 0 \qquad p, q > 0$$

e si riscrive, come prima,

$$x^3 + 0x^2 - px + q = 0 \qquad \text{e} \qquad x^3 - 0x^2 - px + q = 0$$

siccome si hanno *sempre* due variazioni ed una permanenza, si conclude che l'equazione proposta ha tre radici reali, due positive ed una negativa [9]. Implicitamente van Schooten invoca una continuità delle radici dell'equazione contando le variazioni di $x^3 + \varepsilon x^2 - px + q = 0$ quando $|\varepsilon| \ll 1$ ed ε assume segni opposti.

Gli sforzi di van Schooten non furono sufficienti a fermare le obiezioni anche perché i suoi esempi erano lungi dal fornire una solida dimostrazione. Ed ecco che nel 1684 Michel Rolle avanza dubbi sulla generalità della regola proponendo esempi in cui essa *sembra* cadere in difetto: sembra, perché ancora una volta gli esempi addotti hanno radici immaginarie per i quali era da attendersi che la regola non fosse conclusiva. Dietro le quinte, a generare l'equivoco sembra

ancora esserci il malinteso sulle radici immaginarie vere o false, cioè presunte positive o negative.

Non fu però solo la validità o la generalità della regola dei segni ad essere messa in discussione ma anche l'attribuzione a Cartesio che si trovò ad affrontare l'accusa di aver copiato la regola dalla *Artis analyticae praxis* di Thomas Harriot (1560-1621), pubblicata postuma a Londra nel 1631 e dunque prima della *Géométrie*. A sollevare questo dubbio fu William Cavendish (1603-1683) che espresse la sua opinione a Roberval durante un viaggio a Parigi, presumibilmente attorno al 1648. Roberval, nemico di Cartesio, sposò subito la causa e fece circolare l'accusa di plagio in un trattatello di algebra *anonimo*. Carcavi ne informò Cartesio che, forse risentito, troncò ogni corrispondenza con quest'ultimo. Va peraltro aggiunto [16] che Cartesio aveva scritto ad Huygens nel 1638, quindi dieci anni prima delle accuse di Roberval, di avere ricevuto solo da alcuni mesi il volume di Harriot. Le accuse di plagio vennero ripresentate da John Wallis, nel *Treatise of Algebra both historical and practical* del 1685. Tuttavia in alcune lettere Wallis sembra contraddirsi, affermando ora con nettezza la paternità di Harriot sulla regola dei segni, ora riconoscendo di non averla trovata negli scritti di Harriot. Chi contribuì molto a sottolineare i meriti di Harriot fu Leibniz che giunse ad affermare come *gran parte della Geometria di René Descartes....fosse desunta dall'Analisi di Thomas Harriot*[21] generando un equivoco che si sarebbe protratto ancora fino al XIX secolo. Va detto che l'analisi dei testi pubblicati e manoscritti di Harriot ha *escluso* che egli abbia formulato la regola dei segni in generale ma che, piuttosto, egli avesse elaborato dei criteri per riconoscere la natura delle soluzioni di equazioni di terzo grado e di alcune equazioni di quarto grado.

Wallis ebbe però il merito di richiamare il fatto che la regola dei segni, anche se formulata per le equazioni prive di radici immaginarie, mancava di una adeguata dimostrazione: *sed demonstratione indiget*. Leibniz poi, in una lettera indirizzata a Jacob Hermann (1678-1733) il 18 gennaio 1707 fa una osservazione cruciale che è alla base delle dimostrazioni della regola affermando che questa dimostrazione si otterrebbe col dimostrare la seguente proposizione: *se un'equazione viene moltiplicata per una radice vera (falsa), il numero di permutazioni (permanenze) si accresce di una unità.*

Trovata la chiave della dimostrazione occorreva superare gli inevitabili ostacoli tecnici. Vi sono state due strategie dimostrative, una *algebrica*, l'altra *analitica*. Inoltre, alcune dimostrazioni vogliono ottenere la regola dei segni nel caso in cui l'equazione algebrica ha tutte le radici reali e dunque il numero di variazioni fornisce *esattamente* il numero di radici positive; altre si pongono nel contesto più generale, in cui non si esclude la presenza di radici immaginarie e dove il numero di variazioni rappresenta un limite superiore al numero di radici positive. La prima dimostrazione corretta nell'impianto ma lacunosa nella giustificazione di alcuni risultati cruciali fu proposta nel 1728 nella tesi di laurea di Joannes Andreas Segner (1704-1779) e fu seguita l'anno successivo da quella del matematico britannico George Campbell (1705-1766) in un opuscolo dal titolo

[21] magnam partem Geometriae Renati Cartesii ex Thomae Harioti Analysi ...fuisse desuntam

A Demonstration of the Cartesian Rule for Determining the number of Positive and Negative Roots in any adfected Equation che si segnala anzitutto per un uso difforme dal consueto del concetto di variazione e permanenza. Per Campbell una variazione di segni è costituita da

tutti i termini contigui positivi insieme al primo termine negativo immediatamente seguente; o tutti i termini contigui negativi insieme al primo termine positivo immediatamente seguente.[22].

Per esprimere questi concetti Campbell rappresenta una variazione in una di queste forme

$$-\Delta x^m\{+Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Lx^n - Mx^{n-1} \tag{5.21}$$

oppure

$$+\Delta x^m\{-Ax^{m-1} - Bx^{m-2} - Cx^{m-3} - \cdots - Lx^n + Mx^{n-1}$$

dove la parentesi { indica che $\mp\Delta x^m$ non contribuisce alla variazione. A questa definizione segue l'enunciato del seguente Lemma che poggia su un risultato mostrato da Campbell l'anno precedente:

In ogni equazione non pura, priva di radici immaginarie, il quadrato di ogni coefficiente è sempre maggiore del rettangolo compreso tra i coefficienti adiacenti.[23].

In altri termini, $a_i^2 > a_{i-1}a_{i+1}$ se tutte le soluzioni di $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ sono reali. Questo risultato è al centro del Teorema principale nel lavoro di Campbell

Se si moltiplica una certa equazione avente tutte le radici reali, per un'equazione semplice dotata di una radice reale e positiva ottenendo in questo modo un'altra equazione; allora ogni variazione di segno nell'equazione assegnata (a parte l'ultima) ne produrrà solo una nell'equazione prodotto; ma l'ultima variazione di segni (nell'equazione proposta) unitamente ai termini che la seguono (se ve ne sono) produrrà due variazioni di segno nell'equazione prodotto.[24]

Si parta allora dalla (5.21) e la si moltiplichi per $x - a$, con $a > 0$ ottenendo

$$-\Delta x^{m+1} + \{(A + \Delta a)x^m + (B - Aa)x^{m-1} + (C - Ba)x^{m-2} + \cdots - (M + La)x^n :$$

ora, o tutti i coefficienti successivi a $(A + \Delta a)x^m$ sono positivi, oppure sia, ad esempio, $(C - Ba)$ il primo coefficiente negativo, per cui $Ba > C$. Grazie al lemma, si ha $C^2 > BD$ e dunque $aBC^2 > BCD$, da cui segue $Ca > D$ cosicché

[22] all the contiguous positive terms together with the immediately following negative term; or, all the contiguous negative terms together with the immediately following positive term

[23] In every adfected equation, none of whose roots are imaginary, the square of any coefficient is always greater than the rectangle under the adjacient coefficients

[24] If any proposed equation, all whose roots are real, be multiply'd by a simple equation that hath a real and positive root, and by these means another equation be produced; then each variation of signs in the proposed equation (except the last one) will by this multiplication produce only one in the product equation; but the last variation of signs (in the proposed equation) together with the terms following it (if there be any) will by this multiplication produce two variations of signs in the product equation.

anche $D-Ca$ è negativo. Iterando la procedura sui singoli coefficienti, Campbell può concludere che nei termini considerati dell'equazione prodotto vi è un'unica variazione. Grazie a questo Campbell dimostra alcuni risultati che si riferiscono ad equazioni complete a radici reali: 1) Se un'equazione a termini positivi viene moltiplicata per $x-a$, il prodotto presenta un'unica variazione; 2) Nel prodotto di un'equazione con termini di segno qualsiasi per $x-a$ si ottiene un'equazione con una variazione in più; 3) se un'equazione viene moltiplicata per un'altra, il prodotto ha tante variazioni in più della prima equazione quante sono le radici positive della seconda. In conclusione, Campbell mostra che

In ogni equazione non pura avente solo radici reali vi sono tante variazioni di segno quante sono le radici positive. Quindi, viceversa,... vi sono tante radici positive quante sono le variazioni di segno.[25]

Alla dimostrazione di Campbell si rifece l'abate Jean Paul De Gua De Malves (1712 ca.-1783) che propose due distinte dimostrazioni della regola dei segni in una memoria apparsa nel 1741. Senza entrare nei dettagli osserviamo, sulla scorta di [16], alcuni aspetti importanti del lavoro di De Gua: egli fu il primo a proporre i significati di permanenza e variazione come sono usati ancor oggi; fu il primo a proporre una dimostrazione *analitica* della regola con la quale affrontò, anche qui per primo, il caso generale in cui possono esservi radici immaginarie. Il punto cruciale nelle dimostrazioni analitiche (dopo quella di De Gua, ne seguirono altre, dovute ad Abraham Gotthelf Kästner (1710-1800) nel 1745 ed a Franz Ulrich T. Aepinus (1724-1802) nel 1758 è chiarire il legame tra i segni delle radici di un'equazione e quelli della derivata dell'equazione, rapporto che è vitale anche per il metodo di risoluzione numerica di Rolle. Daremo un esempio dettagliato di dimostrazione analitica tra poco, parlando di Paolo Ruffini (1765-1822). Nel 1756, Segner propose una nuova dimostrazione algebrica della regola di Cartesio piuttosto elementare. Quando si considera il prodotto di

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} - a_3x^{m-3} \cdots - a_{m-1}x + a_m$$

con una radice negativa, cioè con il binomio $x+a$, l'operazione può essere riportata nello schema seguente

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & x^m & +a_1x^{m-1} & +a_2x^{m-2} & -a_3x^{m-3} & \cdots & -a_{m-1}x & +a_m & \\
 & x & +a & & & & & & \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - \\
A & x^{m+1} & +a_1x^m & +a_2x^{m-1} & -a_3x^{m-2} & \cdots & -a_{m-1}x^2 & +a_mx & \\
B & & ax^m & +aa_1x^{m-1} & +aa_2x^{m-2} & -\cdots & \cdots & -aa_{m-1}x & +aa_m
\end{array}$$

Ora, i termini che formano la serie A hanno tutti lo stesso segno di quelli dell'equazione data mentre ogni termine appartenente alla serie B ha lo stesso segno di quello che lo precede (che ha esponente maggiore di un'unità) nella serie A. Volendo analizzare l'andamento dei segni dell'equazione prodotto si osserva allora che si parte con la successione di segni di A finché, da un certo punto, la

[25] In every adfected equation, all whose roots are real, there are just as many variations of signs, as there are positive roots. Therefore, viceversa,... there are just as many positive roots, as there are variations of signs.

serie B è in grado di imporre il proprio segno su cui si continua fino eventualmente a tornare ai segni di A e così via fino comunque a concludere con il segno dell'ultimo termine della serie B, dato che la serie A non possiede termine di grado zero. In definitiva, il numero di volte in cui si passa dalla serie dei segni di A a quella di B supera di una unità il numero di volte in cui si torna da B ad A. Esaminando la natura dei casi per i quali si ha passaggio da una serie all'altra di segni, Segner può mostrare che: 1) il prodotto di una qualunque equazione a coefficienti reali per $x + a$ (per una radice negativa) presenta almeno una permanenza in più rispetto all'equazione di partenza; 2) il prodotto di una qualunque equazione a coefficienti reali per $x - a$ (per una radice positiva) presenta almeno una variazione in più rispetto all'equazione di partenza. Poiché dunque la moltiplicazione di un'equazione per $x + a$ introduce una radice reale negativa nel prodotto ed *almeno* una permanenza, ne consegue che il numero di permanenze in un'equazione algebrica non può essere minore delle sue radici reali negative; similmente il numero delle radici positive non può essere inferiore al numero di variazioni introdotte nell'equazione prodotto.

Osserviamo che, a differenza della dimostrazione giovanile, in questo caso Segner si è cimentato con il caso generale della regola dei segni.

Leonhard Euler (1707-1783) dedicò spazio alla regola dei segni nel Cap. XII delle *Institutiones Calculi Differentialis* del 1755 premettendo alla loro trattazione due proposizioni ausiliarie: 1) Se una equazione algebrica $p(x) = 0$ ha solo radici positive (negative), l'equazione derivata $p'(x) = 0$ gode della stessa proprietà e le sue radici separano quelle di $p(x) = 0$; 2) Se in un'equazione $p(x) = 0$ si opera la trasformazione $x = 1/y$, considerando l'equazione a radici reciproche, il numero di radici reali od immaginarie non cambia.

Ora Eulero considera un'equazione del tipo

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

e suppone che essa possegga solo radici positive. Derivando $n-1$ volte approdò all'equazione $x + (1/n)a_1 = 0$ che, per la Prop. 1) deve avere la radice positiva, per cui $a_1 < 0$. Operando ora la trasformazione a radici reciproche ed invocando entrambe le Prop. 1) e 2), Eulero può concludere che le equazioni

$$1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n = 0 \qquad \text{e} \qquad a_1 + 2a_2 y + \cdots + n a_n y^{n-1} = 0$$

possiedono solo radici reali e positive. Operando nell'ultima equazione la sostituzione $y = 1/x$ e sempre per Prop. 2), la stessa proprietà deve valere anche per l'equazione

$$a_1 x^{n-1} + 2a_2 x^{n-2} + \cdots + n a_n = 0$$

che, derivata $n-2$ volte, fornisce l'equazione $a_1 x + (\frac{2}{n-1})a_2$ che, ancora per la Prop. 1) deve avere la radice positiva, da cui segue che a_2 è di segno opposto ad a_1. Da ciò Eulero dedusse che, se in un'equazione i primi tre termini hanno lo stesso segno, l'equazione deve avere due radici negative e che, operando analogamente, se due termini consecutivi hanno segno concorde, allora l'equazione ha almeno una radice negativa. Eulero afferma poi che, sempre nell'ipotesi

che l'equazione di partenza possegga solo radici positive, due termini consecutivi debbono avere segno opposto per cui conclude che il numero di variazioni coincide con quello delle radici positive. La dimostrazione di Eulero è però incompleta in quanto egli ha in effetti mostrato che in presenza di variazioni vi è almeno una radice positiva e in presenza di permanenze vi è almeno una radice negativa.

Nelle *Meditationes Algebraicae* (1782, III Ed.) Edward Waring (1736 ca.-1798) fece un'osservazione da cui Gauss saprà trarre frutto. Precisamente, se $a_{n-m}x^{n-m} - a_{n-m-1}x^{n-m-1}$ sono i termini nei quali si manifesta la prima variazione dell'equazione di partenza, allora quando si moltiplica l'equazione per $x - a$ il coefficiente di x^{n-m} è certamente *negativo* ed ha valore $-(aa_{n-m} + a_{n-m-1})$.

Vediamo ora un'ultima dimostrazione pre-gaussiana, esposta da Paolo Ruffini al capitolo III del suo trattato *La Teoria Generale delle Equazioni*, apparso nel 1799 [6]. Egli dapprima osserva che, se in corrispondenza di $x = a$ ed $x = b$, $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segni opposti, allora deve esistere una radice reale di $Y = f(x) = 0$ nell'intervallo (a, b). Se

$$Y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Tx + V = 0$$

rappresenta l'equazione assegnata e

$$Z = mx^{m-1} + A(m-1)x^{m-2} + \cdots + T = 0$$

è la sua equazione derivata e se $x_1 > x_2 > x_3 \cdots$ sono le radici reali di Y disposte in ordine *decrescente*, allora

$$Z(x_1) > 0 \quad Z(x_2) < 0 \quad Z(x_3) > 0....$$

continuando i segni ad alternarsi. Ruffini ora considera l'equazione ottenuta moltiplicando ordinatamente ciascun termine di Y per un termine della progressione aritmetica di termine iniziale a e ragione $-b$ $(b > 0)$

$$R = ax^m + (a-b)Ax^{m-1} + (a-2b)Bx^{m-2} + \cdots + (a-(m-1)b)Tx + (a-mb)V = 0$$

e dimostra che

$$R = (a - mb)Y + bxZ$$

Se tra le radici x_i di $Y = 0$ p sono positive e q negative e se le x_i vengono sostituite in R, quest'ultima si riduce a $R(x_i) = bx_iZ(x_i)$ e, per quanto visto prima, R passerà da positiva a negativa tutte le volte che si considerano due radici reali successive di $Y = 0$, finché non si giunge alla più piccola radice positiva; sostituendo le radici negative, la presenza del fattore x in R altera la regolarità nello scambio dei segni perché ora R ha il segno di $-Z$. Ruffini conclude allora che tra le p radici positive di Y ve ne sono intercalate almeno $(p-1)$ di Z mentre tra le q radici negative di Y ve ne sono intercalate almeno $q-1$ di Z, mentre nulla si può dire circa eventuali radici di $Z = 0$ presenti nell'intervallo tra la più piccola radice positiva e la più grande radice negativa

di Y. In questo modo Ruffini conclude che $Y = 0$ non può avere al massimo che una radice reale positiva ed una radice reale negativa *in più* di quante ne abbia $R = 0$. Infatti, se ϱ è il numero di radici positive di $R = 0$ e se $Y = 0$ ne avesse $\varrho + 1 + t$ con $t > 0$, ripercorrendo il cammino appena tracciato, concluderemmo che $R = 0$ ammette *almeno* $\varrho + t$ radici positive, contrariamente all'ipotesi. Ora si itera la procedura partendo da R e formandone il prodotto con un'altra progressione aritmetica *simile alla precedente* e giungendo ad una nuova equazione $R' = 0$ tale che $Y = 0$ ha al più due radice positive in eccesso rispetto a quelle di $r' = 0$; si può procedere ancora a generare in questo modo una famiglia (finita) di equazioni $R^{(m)} = 0$, ciascuna delle quali perde al più una radice positiva ed una negativa rispetto ad $R^{(m-1)}$. A questo punto Ruffini fa entrare in gioco le permanenze e variazioni di segno ed osserva che, se tutti i termini a, $a - b$,....$a - mb$ sono positivi, Y ed R hanno lo stesso numero di permanenze e variazioni mentre, se ad un certo punto si ha $a - kb < 0$, R perde una variazione od una permanenza rispetto ad Y, a seconda dei valori di a e b. Operando dapprima in modo da eliminare una variazione alla volta, Ruffini può ottenere un'equazione in cui non vi siano affatto variazioni e da questo può concludere che un'equazione non può avere radici positive in numero superiore alle variazioni presenti in essa. Similmente si opera per togliere le permanenze una alla volta ed approdare ad un'equazione che ne sia priva e che pertanto non può possedere alcuna radice negativa da cui si conclude che il numero di radici negative di un'equazione algebrica non può superare quello delle permanenze.

Siamo così arrivati alla dimostrazione di Gauss del 1828 [5] in una nota che si può suddividere in due parti. Nella prima egli mostra che, se $a > 0$, il prodotto $f(x)(x - a)$ ha almeno una variazione in più di $f(x)$. Infatti, considerato il polinomio

$$X = x^m + Ax^{m-1} + \cdots - Nx^n - \cdots + Px^p + \cdots - Qx^q \cdots \pm V$$

dove sono indicati solo i termini, a parte quello iniziale, in cui avvengono le variazioni, il prodotto

$$X(x - a) = x^{m+1} + A'x^m \cdots - N'x^{n+1} \cdots + P'x^{p+1} \cdots - Q'x^{q+1} - \cdots \mp aV$$

i coefficienti N', P', Q' sono certamente positivi, come aveva osservato Waring. I termini omessi hanno segno ambiguo ma si può certamente concludere che fino al termine di grado $n + 1$ vi è *almeno* una variazione; fino a quello di grado $p+1$ ve ne sono almeno due, e così via fino al termine noto che ha segno opposto rispetto a quello del termine noto di X. Questo basta a concludere che $X(x-a)$ ha almeno una variazione in più rispetto ad X. Se ora si prende un generico polinomio $Y = X(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$ dove a, b, c, $\cdots$ sono le radici positive di Y mentre X è un polinomio contenente le radici negative ed immaginarie di Y, allora Y conterrà variazioni in numero non inferiore al numero delle sue radici positive. Osservato infine che le radici negative di Y sono le radici positive del polinomio Y' che si ottiene sostituendo $x \mapsto -x$ in Y, Gauss conclude con la seguente formulazione della regola di Cartesio

L'equazione $Y = 0$ non può avere più radici reali positive delle variazioni di segni che si presentano in Y e non può avere più radici reali negative delle variazioni di segno che si presentano in Y'.

Per concludere, osservo che la eventuale discrepanza tra il numero di radici positive di un'equazione algebrica ed il numero di variazioni presenti *deve* essere un numero pari. Questo risultato può essere ottenuto combinando la regola dei segni, nella forma dovuta a Descartes con il teorema di Budan-Fourier. Questo teorema fu enunciato da Ferdinand François Désiré Budan de Boislaurent (1761-1840), matematico di origini haitiane ma educato in Francia, nel 1807 nell'opuscolo *Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques d'une degré quelconque.* La dimostrazione fu pubblicata solo in un suo lavoro del 1822, comunicato all'Adadémie des Sciences undici anni prima, nel 1811. Dal canto suo Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) aveva già lavorato al problema della separazione delle radici di un'equazione algebrica nell'ultima decade del XVIII secolo, esponendo i risultati delle sue ricerche in cicli di lezioni tenute presso l'École Polytechnique nel periodo tra il 1795 ed il 1798 ma non pubblicò la dimostrazione del teorema che nel 1820, quando venne a conoscenza del lavoro di Budan. Il teorema di Budan-Fourier si enuncia in questi termini:

Siano α e $\beta > \alpha$ due numeri reali qualunque, che non siano però radici né dell'equazione [algebrica] $f(x) = 0$ di grado n, né delle sue derivate successive. Se si considerano allora le due successioni

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f''(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha)$$

e

$$f(\beta),\ f'(\beta),\ f''(\beta), \ldots, f^{(n)}(\beta)$$

si ha che il numero di variazioni contenute nella prima successione è maggiore od uguale al numero delle variazioni contenute nella seconda e che il numero delle radici reali dell'equazione $f(x) = 0$ comprese fra α e β non può mai superare la differenza fra il numero di variazioni della prima e della seconda successione, ma può esserle inferiore per un numero pari. ([19], pp. 570-571)

Se si pone $\alpha = 0$ e $\beta = +\infty$ nel teorema di Budan-Fourier si ottiene la generalizzazione della regola di Cartesio perché $f(0),\ f'(0),\ f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ non sono altro che i *coefficienti* del polinomio $f(x)$.

Bibliografia

[1] F. Viète: *In artem analyticem isagoge* (1591). In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 1–12, (1646).

[2] F. Viète: Francisci Vietae ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Responsum. In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 305-324, (1646).

[3] F. Viète: *In artem analyticem isagoge*. In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 1–12, (1646).

[4] P. Freguglia: Algebra e geometria in Viète. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **9**, 49-90, (1989).

[5] P. Freguglia: Sur la théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **14**, 259-298, (1994).

[6] E. Giusti: Algebra and Geometry in Bombelli and Viète. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* **12**, 303–328, (1992).

[7] F. Viète: *De Emendatione ac Recognitione Æquationum Tractatus duo*. In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 83–161, (1646).

[8] A. Girard: Invention Nouvelle en l'Algèbre, Blaeuw, Amsterdam, (1629). Ristampata a cura di D. Bierens de Haan, Leida, (1884).

[9] F. van Schooten: *In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii*. In R. Des Cartes Geometria, Knoch (Frankfurt an Mein) (1695).

[10] L. Matthiessen: *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Teubner, Leipzig, (1896).

[11] J. Stillwell: *Mathematics and its History*. Springer, New York, (2004).

[12] F. Viète: *De Numerosa Potestatum ad Exegesin Resolutione*. In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 163–228, (1646).

[13] T.J. Ypma: Historical development of the Newton-Raphson method. *SIAM Reviews* **37**, 531-551, (1995).

[14] H.H. Goldstine: *A History of Numerical Analysis From the 16th Through the 19th Century.* Springer, New-York, (1977).

[15] *The Geometry of René Descartes with a fac-simile of the first edition*, translated from the French and Latin by D.E. Smith and M.L. Latham, Dover, New York, (1954). Riproduzione dell'edizione del 1925 pubblicata da Open Court Publishers.

[16] M. Bartolozzi, R. Franci: La regola dei segni dall'enunciato di R. Descartes (1637) alla dimostrazione di C.F. Gauss. *Archives for the History of Exact Sciences*, **45**, 335-374, (1993).

[17] P. Ruffini, *Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto.* Bologna, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, (1799).

[18] C.F. Gauss: Beweis eines algebraischen Lehrsatzes, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **3**, 1–4, (1828).

[19] A. Capelli: *Istituzioni di Analisi Algebrica.* Pellerano, Napoli, (1909).